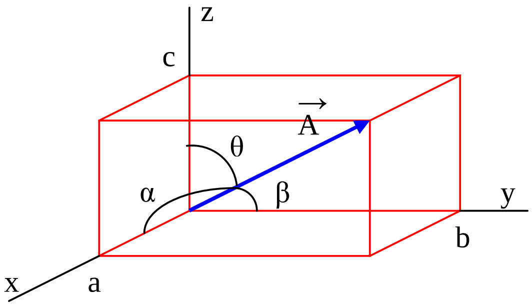
VECTORES EN TRES DIMENSIONES

Los vectores pueden expresarse en función de coordenadas, de la siguiente manera:

$$\boxed{\vec{A} = (a; b; c)}$$

o de otra forma: $\boxed{\vec{A} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}}$

donde: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, son vectores denominados, vectores unitarios que indican la dirección de los ejes "x", "y", "z" respectivamente.



El módulo del vector $\vec{A}$ es igual:

$$\boxed{A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ejemplo: *El módulo del vector:*

$$\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Es igual a: $A = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \rightarrow$ A = 3

COSENOS DIRECTORES:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1}$$

$\cos\alpha = \dfrac{a}{A} \rightarrow$ a = A cosα

$\cos\beta = \dfrac{b}{A} \rightarrow$ b = A cosβ

$\cos\theta = \dfrac{c}{A} \rightarrow$ c = A cosθ

α: ángulo que forma el vector $\vec{A}$ con el eje x
β: ángulo que forma el vector $\vec{A}$ con el eje y
θ: ángulo que forma el vector $\vec{A}$ con el eje z

SUMA DE VECTORES

Si se tiene: $\vec{A} = (a_1; b_1; c_1)$
$\vec{B} = (a_2; b_2; c_2)$

Entonces: $\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2)$

Ejemplo: *calcular el módulo del vector resultante de los siguientes vectores:*

$\vec{A} = (2; 1; -2)$
$\vec{B} = (1; -3; 1)$
$\vec{C} = (-1; 1; -1)$

La resultante de estos vectores es:

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$
$\vec{R} = (2+1-1; 1-3+1; -2+1-1)$
$\vec{R} = (2; -1; -2)$

También se expresa: $\vec{R} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

El módulo de la resultante es:

$R = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9}$
$R = 3$

RESTA DE VECTORES

Si se tiene: $\vec{A} = (a_1; b_1; c_1)$
$\vec{B} = (a_2; b_2; c_2)$

Entonces: $\vec{A} - \vec{B} = (a_1 - a_2; b_1 - b_2; c_1 - c_2)$

Ejemplo: *Calcular:* $|\vec{A} - \vec{B}|$

Si se tiene: $\vec{A} = (4; -8; 6)$
$\vec{B} = (1; 4; 2)$

La resta de los vectores es:

$\vec{A} - \vec{B} = (4-1; -8-4; 6-2)$
$\vec{A} - \vec{B} = (3; -12; 4)$

También se expresa: $\vec{A} - \vec{B} = 3\vec{i} - 12\,\vec{j} + 4\vec{k}$

El módulo del vector resta es:

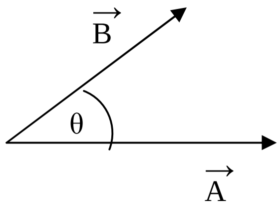
$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(3)^2 + (-12)^2 + (4)^2}$
$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{169}$
$|\vec{A} - \vec{B}| = 13$

física para todos

PRODUCTO DE VECTORES

Producto escalar ($\vec{A}\cdot\vec{B}$)

Al multiplicar escalarmente dos vectores, se obtiene como resultado "un número". Dicho número se obtiene multiplicando los módulos de los vectores y por el coseno del ángulo que forman dichos vectores.



$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=A\,B\cos\theta}$$

Ejemplo: *Si los módulos de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son A= 12, B=6 y el ángulo que forman dichos vectores es 60º. Calcular el producto escalar de ellos.*

$\vec{A}\cdot\vec{B}=A\,B\cos\theta$ = (12)(6) cos60º

$\vec{A}\cdot\vec{B}$ = (72)(0,5) $\rightarrow$ $\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=36}$

Ejemplo: *Si se tiene los vectores:*

$\vec{A}=(1;2;-2)$

$\vec{B}=(3;-1;2)$

Calcular el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$

$\vec{A}\cdot\vec{B}$ = (1)(3) + (2)(-1) + (-2)(2)

$\vec{A}\cdot\vec{B}$ = 3 -1 -4

$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=-2}$

Caso particular: Cuando dos vectores son perpendiculares entre sí, el producto escalar de ellos es "CERO"

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=0}$$

Ejemplo: *Si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre si, hallar el valor de "a"*

$\vec{A}=(a;2;-2)$ *y* $\vec{B}=(3;-1;a)$

Si son perpendiculares, se cumple: $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$

Osea: (a)(3) + (2)(-1) + (-2)(a) = 0

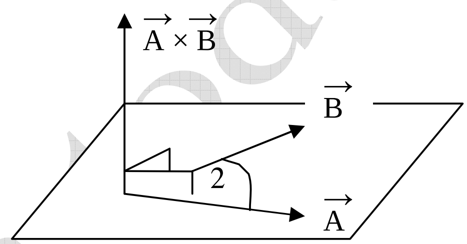
3a – 2 – 2a = 0 $\rightarrow$ a = 2

Producto vectorial ($\vec{A}\times\vec{B}$)

Al multiplicar vectorialmente dos vectores se obtiene como resultado a otro vector.
El módulo de ese vector es igual al producto de los módulos de los vectores a multiplicar y por seno del ángulo que forman entre sí.

$$\boxed{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=A\,B\,sen\,\theta}$$

La dirección de dicho vector es perpendicular al plano que contiene a los vectores $\vec{A}$ *y* $\vec{B}$



Si los vectores $\vec{A}$ *y* $\vec{B}$ son dados de la siguiente forma:

$\vec{A}=(1;2;3)$ *y* $\vec{B}=(4;5;6)$

Su productor vectorial se determina así:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$\vec{A}\times\vec{B}=(2\times6-5\times3)\vec{i}-(1\times6-4\times3)\vec{j}+(1\times5-4\times2)\vec{k}$

$\vec{A}\times\vec{B}=(12-15)\vec{i}-(6-12)\vec{j}+(5-8)\vec{k}$

$\boxed{\vec{A}\times\vec{B}=-3\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}}$

Si se desea calcular el módulo del producto vectorial se procede a efectuar así:

$\vec{A}\times\vec{B}=-3\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}$

$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(3)^2}$

$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\sqrt{9+36+9}=\sqrt{54}$

$\boxed{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=3\sqrt{6}}$

física para todos

¿Cómo se determina el vector unitario de un vector?

El vector unitario de cualquier vector $\vec{A}$

Se expresa de la siguiente manera: $\boxed{\vec{u} = \dfrac{\vec{A}}{A}}$

Ejemplo: *Para determinar el vector unitario del vector:* $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, *se determina en primer lugar, su módulo:*

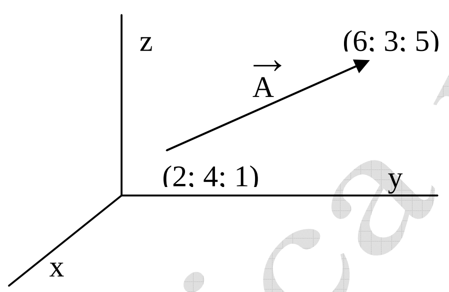
$$A = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \;\rightarrow\; A = \sqrt{9} \;\rightarrow\; A = 3$$

Entonces: $\vec{u} = \dfrac{\vec{A}}{A} = \dfrac{2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

El vector unitario del vector $\vec{A}$, es igual a:

$$\boxed{\vec{u} = \frac{2\vec{i}}{3} + \frac{\vec{j}}{3} + \frac{2\vec{k}}{3}}$$

¿Cómo se determina la ecuación vectorial de un vector?



El vector $\vec{A}$ está entre los puntos:
(2; 4; 1) y (6; 3; 5)
Su ecuación vectorial se obtiene restando el punto del extremo del vector menos el punto del origen del vector:

$\vec{A}$ = (6; 3; 5) – (2; 4; 1)
$\vec{A}$ = (6 - 2; 3 - 4; 5 - 1)
$\vec{A}$ = (4; -1; 4)

$$\boxed{\vec{A} = 4\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular la resultante $(\vec{R})$ de los siguientes 3 vectores:
   $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$
   $\vec{B} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$
   $\vec{C} = -4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$
   A) $\vec{R} = \vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ B) $\vec{R} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$
   C) $\vec{R} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ D) $\vec{R} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$
   E) $\vec{R} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

2.- Determine el módulo del vector $\vec{F}$, si:
   $\vec{F} = 2\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C}$
   $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
   $\vec{B} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$
   $\vec{C} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$
   A) 6 B) $6\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{3}$
   D) $6\sqrt{5}$ E) 12

3. Si el módulo del vector $\vec{A}$ es igual a 3, calcular el módulo del vector $\vec{B}$:
   $\vec{A} = (1; a; a)$; $\vec{B} = (2a; a; 4)$
   A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 6
   D) $6\sqrt{2}$ E) 10

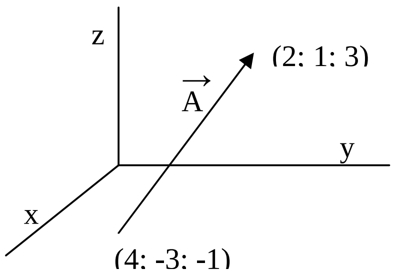
4. Determine los valores de m y n si se cumple la siguiente relación:
   $\vec{A} = m\vec{B} + n\vec{C}$
   $\vec{A} = \vec{i} - \vec{j}$; $\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$;
   $\vec{C} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$
   Dar como respuesta: m+ n
   A) 0 B) -1 C) +1
   D) +2 E) -2

5. Un vector $\vec{A}$ tiene su origen en el punto (2; -1; -2) y su extremo (flecha) en un punto "P"; un segundo vector $\vec{B}$ se inicia en el punto "P" y termina en el punto (-3; 1; 3). Calcular el módulo del vector resultante de estos dos vectores.
   A) $2\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{6}$ C) $4\sqrt{6}$
   D) $5\sqrt{6}$ E) $6\sqrt{6}$

física para todos

6. Dos vectores parten de un mismo punto "P" y uno de ellos termina en el punto (3; -2; -1) y el otro en el punto (2; -4; -2). Calcular el módulo de la resta de estos vectores.
   A) $\sqrt{6}$ B) 2 C) 3
   D) $\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{6}$

7. Calcular el vector unitario del vector $\vec{A}$.

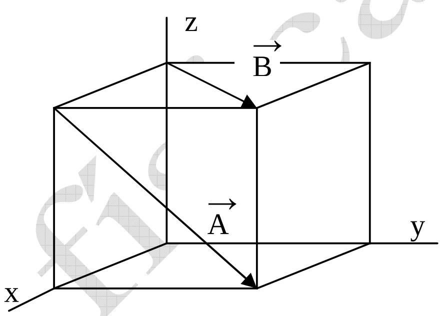


   A) $\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$ B) $\frac{1}{6}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{1}{3}\vec{k}$

   C) $\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}$ D) $\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$

   E) $-\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$

8. Calcular la resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, ubicados en el siguiente cubo de 2 unidades de arista.



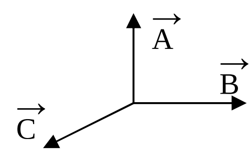
   A) $\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ B) $2\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$
   C) $2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ D) $2\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$
   E) $2\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$

9. Si la resultante de los vectores $\vec{a}\,;\vec{b}\ y\ \vec{c}$ es nula, calcular: m + n + p.
   $\vec{a}=(m;n;-4)$; $\vec{b}=(n;-1;p)$ y $\vec{c}=(3;p;m)$
   A) 0 B) +1 C) -1
   D) +2 E) -2

10. Si se tiene: $\vec{a}=(3;1;-4)$ y $\vec{b}=(-2;3;1)$.
   Calcular: $\vec{a}\cdot\vec{b}$
   A) +7 B) -7 C) -1
   D) +1 E) 0

11. Si los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ son perpendiculares entre sí, determine el valor de "a".
   $\vec{A}=(a;-2;3)$ y $\vec{B}=(2;1;-a)$
   A) 0 B) +1 C) -1
   D) +2 E) -2

12. En la figura se tiene a los vectores $\vec{A};\vec{B}\ y\ \vec{C}$ perpendiculares entre sí. Indique la expresión correcta que represente la figura.



   A) $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$ B) $\vec{C}\times\vec{A}=\vec{B}$
   C) $\vec{A}\times\vec{C}=\vec{B}$ D) $\vec{B}\times\vec{C}=\vec{A}$
   E) $\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{C}$

13. Un vector forma 60º con el eje "x", 120º con el eje "y", ¿qué ángulo forma dicho vector con el eje "z"?
   A) 30º B) 45º C) 60º
   D) 120º E) 180º

14. El resultado de efectuar el producto escalar de dos vectores da como resultado una cantidad igual al módulo del producto vectorial de los mismos vectores. ¿Qué ángulo forman dichos vectores?
   A) 30º B) 37º C) 45º
   D) 60º E) 90º

15. ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ si se sabe que: $\vec{A}=2\vec{k}$ y $\vec{B}=\vec{i}+\vec{j}$

física para todos

A) 0º B) 45º C) 60º
D) 90º E) 120º

16. ¿Qué ángulo forman los vectores:

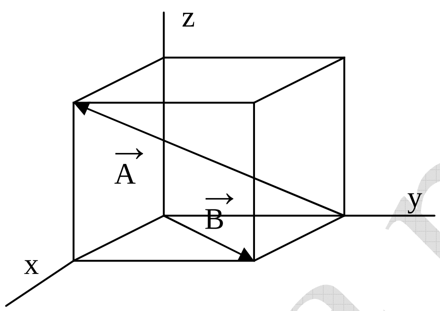
$$\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k} \;\; y \;\; \vec{B}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

A) 30º B) 60º C) 90º
D) Arc tg $\sqrt{2}$ E) Arc tg $\sqrt{3}$

17. Calcular el producto vectorial: $\vec{A}\times\vec{B}$
$\vec{A}=(2;-3;1)$ y $\vec{B}=(1;-2;-1)$

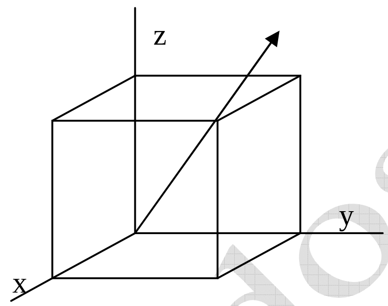
A) (5; 3; -1) B) (5; -3; -1)
C) (-5; 3; 1) D) (1; 3; -1)
E) (1; -1; 3)

18. En la siguiente figura se tiene un cubo de arista igual a 1, y en él dos vectores. Determine el producto escalar de dichos vectores.



A) 0 B) +1 C) -1
D) +2 E) -2

19. El vector ubicado en el cubo de arista igual a 1, tiene un módulo igual a $3\sqrt{3}$. Determine su ecuación vectorial.



A) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ B) $2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$
C) $3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$ D) $3\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$
E) $\sqrt{3}\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}$

20. Se sabe que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí. Calcular: $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$
$\vec{A}=\vec{i}-a\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{B}=2\vec{i}+2\vec{j}+a\vec{k}$

A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 6
D) $6\sqrt{2}$ E) 12

física para todos